第 3 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

例題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-3n$　　(2)　$S_n=3^n+1$

Point Pickup

練習

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = 3n^2 - 2n + 1$　　(2)　$S_n = 2^{n+2} - 4$

第３講　PART1 確認問題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$S_n=2n^2+3n$

$a_n=$ ア $n+$ イ

2　$S_n=5^n$

$a_1=$ ウ

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=$ エ・オ $^{n-1}$

第 3 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

例題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-3n$　　　(2)　$S_n=3^n+1$

(1)　$a_1=S_1=1^2-3\cdot1=-2$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}=2n-4$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot1-4=-2$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-4$

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+1)-(3^{n-1}+1)=3^n-3^{n-1}=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot3^0=2$ となり，a_1 と一致しない。よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=4$，$n\geqq2$ のとき $a_n=2\cdot3^{n-1}$

練習

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=3n^2-2n+1$　　(2) $S_n=2^{n+2}-4$

(1) $a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n+1)-\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\}=6n-5$$

この式で，$n=1$ のとき $6\cdot1-5=1$ となり，a_1 と一致しない。よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき $a_n=6n-5$

(2) $a_1=S_1=2^3-4=4$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)$$
$$=2^{n+2}-2^{n+1}=2\cdot2^{n+1}-1\cdot2^{n+1}=1\cdot2^{n+1}=2^{n+1}$$

この式で，$n=1$ のとき $2^2=4$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n+1}$

第3講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：1

[解説]

$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$

また，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1} \quad \text{[A]}\\&=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=(2n^2+3n)-(2n^2-n-1)\\&=4n+1\end{aligned}$$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot1+1=5$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $\boldsymbol{a_n=4n+1}$

[A]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$a_1=S_1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

2 **[正解]** ウ：5，エ：4，オ：5

[解説]

$a_1=S_1=5^1=5$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad \text{[B]} \\ &= 5^n - 5^{n-1} \\ &= 5\cdot 5^{n-1} - 5^{n-1} \\ &= (5-1)\cdot 5^{n-1} \\ &= 4\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると
　$a_1=S_1$
$n \geqq 2$ のとき
　$a_n=S_n-S_{n-1}$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot 5^0=4$ となり，a_1 と一致しない。

よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって

$$\boldsymbol{a_1=5}$$

$n \geqq 2$ のとき $\boldsymbol{a_n=4\cdot 5^{n-1}}$